33. (α) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $x + y^2$ υπό τον περιορισμό $2x^2 + y^2 = 1$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη φραγμένη εσσιανή, χαρακτηρίστε τα κρίσιμα σημεία.

34. Απαντήστε στο ερώτημα που διατυπώνεται στην τελευταία γραμμή του Παραδείγματος 9.

35. Προσπαθήστε να βρείτε τα ακρότατα της $xy + yz$ μεταξύ των σημείων που ικανοποιούν την $xz = 1$.

36. Η συνάρτηση παραγωγής μιας εταιρείας είναι $Q(x, y) = xy$. Το κόστος παραγωγής είναι $C(x, y) = 2x + 3y$. Αν η εταιρεία μπορεί να δαπανήσει $C(x, y) = 10$, ποια είναι η μέγιστη ποσότητα που μπορεί να παραχθεί;

37. Βρείτε το σημείο της καμπύλης $(\cos t, \sin t, \sin(t/2))$ που απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων.

38. Μια εταιρεία χρησιμοποιεί μάλλινες και βαμβακερές ίνες για να παράγει υφάσματα. Η ποσότητα του υφάσματος που παράγεται δίνεται από την $Q(x, y) = xy - x - y + 1$, όπου x είναι το βάρος του μαλλιού σε κιλά, y το βάρος του βαμβακιού σε κιλά, $x > 1$ και $y > 1$. Αν το μαλλί κοστίζει p δολάρια ανά κιλό, το βαμβάκι q δολάρια ανά κιλό και η εταιρεία μπορεί να δαπανήσει B δολάρια για πρώτες ύλες, ποιος πρέπει να είναι ο λόγος βαμβακιού προς μαλλί ώστε να παράγεται όσο το δυνατόν περισσότερο ύφασμα;

39. Πραγματοποιήστε την ανάλυση του Παραδείγματος 10 για τη συνάρτηση παραγωγής $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, όπου A και α είναι θετικές σταθερές και $0 < \alpha < 1$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση ονομάζεται ***συνάρτηση παραγωγής Cobb–Douglas*** και μερικές φορές χρησιμοποιείται ως ένα απλό μοντέλο για τις εθνικές οικονομίες. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η Q είναι η συνολική παραγωγή της οικονομίας για δεδομένο κεφάλαιο και εργασία.

3.5 Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων [προαιρετική ενότητα]

Σε αυτή την ενότητα θα διατυπώσουμε δύο εκδοχές του *θεωρήματος των πεπλεγμένων συναρτήσεων*, του σημαντικότερου, για κάποιους, θεωρήματος ολόκληρης της μαθηματικής ανάλυσης. Όλο το θεωρητικό υπόβαθρο της θεωρίας των επιφανειών αλλά και η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange εξαρτώνται από αυτό. Επιπλέον, αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο αρκετών πεδίων των μαθηματικών, όπως της διαφορικής τοπολογίας και γεωμετρίας.

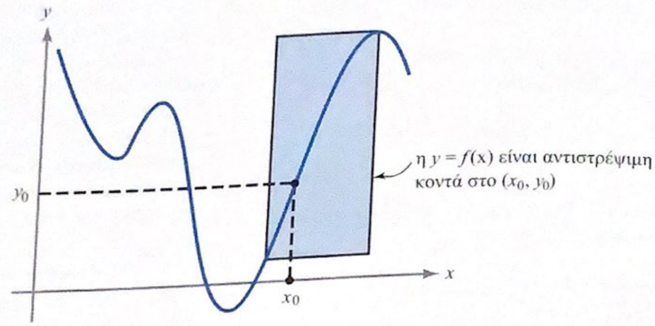
Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων για συναρτήσεις μίας μεταβλητής

Στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής μαθαίνει κανείς τη σημασία που έχει η διαδικασία αντιστροφής. Για παράδειγμα, η $x = \ln y$ είναι η αντίστροφη της $y = e^x$, ενώ η $x = \sin^{-1} y$ είναι η αντίστροφη της $y = \sin x$. Η διαδικασία αντιστροφής είναι σημαντική και στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Για παράδειγμα, για την αλλαγή από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο και αντιστρόφως απαιτείται η αντιστροφή δύο συναρτήσεων δύο μεταβλητών.

Υπενθυμίζουμε από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής ότι αν $y = f(x)$ είναι μια συνάρτηση C^1 και $f'(x_0) \neq 0$, τότε τοπικά κοντά στο x_0 μπορούμε να λύσουμε ως προς x ώστε να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση: $x = f^{-1}(y)$. Μαθαίνουμε ότι $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$, δηλαδή $dx/dy = 1/(dy/dx)$. Το γεγονός ότι η $y = f(x)$ μπορεί να αντιστραφεί είναι λογικό, διότι αν $f'(x_0) \neq 0$ τότε η κλίση της $y = f(x)$ είναι μη μηδενική, άρα το γράφημα ανεβαίνει ή κατεβαίνει κοντά στο x_0. Συνεπώς, το συμμετρικό του γραφήματος ως προς την ευθεία $y = x$ είναι και αυτό γράφημα *κοντά* στο (x_0, y_0), όπου $y_0 = f(x_0)$. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.5.1, μπορούμε να αντιστρέψουμε την $y = f(x)$ στο σκιασμένο κουτί, επομένως σε αυτό το εύρος η $x = f^{-1}(y)$ ορίζεται.

Ένα ειδικό αποτέλεσμα

Θα ασχοληθούμε τώρα με την περίπτωση των πραγματικών συναρτήσεων με μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ και z.



Σχήμα 3.5.1 Αν $f'(x_0) \neq 0$, τότε η $y = f(x)$ είναι τοπικά αντιστρέψιμη.

Θεώρημα 11 Ειδικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων Έστω ότι η συνάρτηση $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και ας συμβολίσουμε τα σημεία του $\mathbb{R}^{n+1}$ με $(\mathbf{x}, z)$, όπου $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $z \in \mathbb{R}$. Αν το $(\mathbf{x}_0, z_0)$ ικανοποιεί τις

$$F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0,$$

τότε υπάρχει μια μπάλα U που περιέχει το $\mathbf{x}_0$ στο $\mathbb{R}^n$ και μια γειτονιά V του z_0 στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει μοναδική συνάρτηση $z = g(\mathbf{x})$ ορισμένη για $\mathbf{x}$ στην U και z στην V που ικανοποιεί την

$$F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0.$$

Επιπλέον, αν τα $\mathbf{x}$ στην U και z στην V ικανοποιούν την $F(\mathbf{x}, z) = 0$, τότε $z = g(\mathbf{x})$. Τέλος, η $z = g(\mathbf{x})$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η παράγωγος της δίνεται από την

$$\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, z)} \mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, z)\bigg|_{z=g(\mathbf{x})},$$

όπου $\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F$ είναι η (μερική) παράγωγος της F ως προς τη μεταβλητή $\mathbf{x}$, δηλαδή $\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F = [\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n]$. Με άλλα λόγια,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος δίνεται στο διαδικτυακό συμπλήρωμα.

Αφού διαπιστώσουμε ότι η $z = g(\mathbf{x})$ υπάρχει και είναι παραγωγίσιμη, ο τύπος (1) μπορεί να ελεγχθεί με πεπλεγμένη παραγώγιση. Πράγματι, αν εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας στην $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$, παίρνουμε

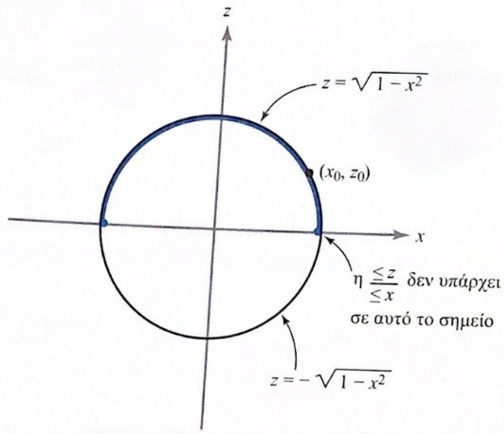
$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \left[\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\right][\mathbf{D}g(\mathbf{x})] = 0,$$

που είναι ισοδύναμη με τη σχέση (1).

Παράδειγμα 1 Στο ειδικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων είναι σημαντικό να κατανοήσουμε την ανάγκη να πάρουμε αρκετά μικρές γειτονιές U και V. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την εξίσωση

$$x^2 + z^2 - 1 = 0,$$

δηλαδή $F(x, z) = x^2 + z^2 - 1$, με $n = 1$. Έχουμε $(\partial F/\partial z)(x, z) = 2z$, οπότε το ειδικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων μπορεί να εφαρμοστεί σε κάποιο σημείο (x_0, z_0) που ικανοποιεί τις $x_0^2 + z_0^2 - 1 = 0$ και $z_0 \neq 0$. Επομένως, κοντά σε τέτοια σημεία, το z ορίζεται μονοσήμαντα ως συνάρτηση του x. Αυτή η συνάρτηση δίνεται από την $z = \sqrt{1 - x^2}$ αν $z_0 > 0$ και $z = -\sqrt{1 - x^2}$ αν $z_0 < 0$. Προσέξτε ότι το z ορίζεται μόνο για $|x| < 1$ (η U δεν πρέπει να είναι πάρα πολύ μεγάλη) και το z είναι μοναδικό μόνο αν είναι κοντά στο z_0 (η V δεν πρέπει να είναι πάρα πολύ μεγάλη). Αυτά, καθώς και η μη ύπαρξη της $\partial z/\partial x$ στο $z_0 = 0$, προκύπτουν, ασφαλώς, άμεσα από το γεγονός ότι η $x^2 + z^2 = 1$ ορίζει έναν κύκλο στο επίπεδο xz (Σχήμα 3.5.2).



Σχήμα 3.5.2 Στο θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων πρέπει να πάρουμε μικρές γειτονιές.

▲

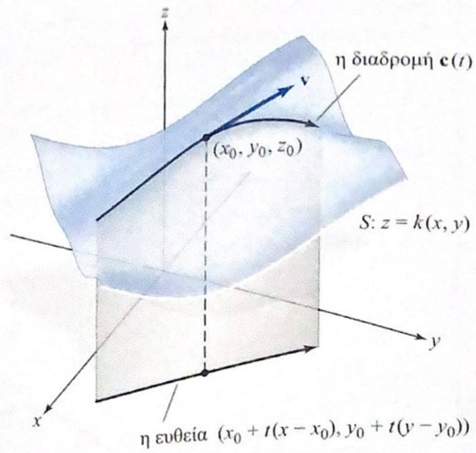
Θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων και επιφάνειες

Ας εφαρμόσουμε το Θεώρημα 11 στη μελέτη των επιφανειών. Μας ενδιαφέρει το σύνολο στάθμης μιας συνάρτησης $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, δηλαδή η επιφάνεια S που αποτελείται από το σύνολο των $\mathbf{x}$ που ικανοποιούν την $g(\mathbf{x}) = c_0$, όπου $c_0 = g(\mathbf{x}_0)$ και το $\mathbf{x}_0$ είναι δεδομένο. Ας πάρουμε $n = 3$ για να είναι τα πράγματα συγκεκριμένα. Τότε, έχουμε να κάνουμε με την επιφάνεια στάθμης μιας συνάρτησης $g(x, y, z)$ που διέρχεται από ένα δεδομένο σημείο (x_0, y_0, z_0). Όπως στο θεώρημα των πολλαπλασιαστών Lagrange, θεωρούμε ότι $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον μία από τις μερικές παραγώγους της g είναι μη μηδενική. Ας υποθέσουμε ότι $(\partial g/\partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 11 στη συνάρτηση $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) - c_0$, γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $z = k(x, y)$ που ικανοποιεί την $g(x, y, k(x, y)) = c_0$ για (x, y) κοντά στο (x_0, y_0) και z κοντά στο z_0. Επομένως, κοντά στο z_0 η επιφάνεια S είναι το γράφημα της συνάρτησης k. Επειδή η k είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, αυτή η επιφάνεια έχει στο (x_0, y_0, z_0) εφαπτόμενο επίπεδο που δίνεται από την

$$z = z_0 + \left[\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0). \tag{2}$$

Από τη σχέση (1), έχουμε

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{και} \quad \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$



ήμα 3.5.3 Η κατασκευή μιας διαδρομής $\mathbf{c}(t)$ στην επιφάνεια S με απτόμενο διάνυσμα το **v**.

Αντικαθιστώντας αυτές τις δύο εξισώσεις στην εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου παίρνουμε την παρακάτω ισοδύναμη περιγραφή:

$$0 = (z - z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0),$$

δηλαδή

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στάθμης της g είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0, z_0). Αυτό συμφωνεί με τα όσα αναφέραμε για τα εφαπτόμενα επίπεδα και τα σύνολα στάθμης στο Κεφάλαιο 2.

Είμαστε πλέον έτοιμοι να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος των πολλαπλασιαστών Lagrange. Για να το κάνουμε, πρέπει να δείξουμε ότι κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι εφαπτόμενο σε μια καμπύλη της S. Σύμφωνα με το Θεώρημα 11, αρκεί να το δείξουμε μόνο για ένα γράφημα της μορφής $z = k(x, y)$. Αν όμως το $\mathbf{v} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ είναι εφαπτόμενο στο γράφημα [δηλαδή αν ικανοποιεί την εξίσωση (2)], τότε το **v** είναι εφαπτόμενο στη διαδρομή της S που δίνεται από την

$$\mathbf{c}(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), k(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)))$$

στο $t = 0$. Αυτό αποδεικνύεται με χρήση του κανόνα της αλυσίδας. (Βλ. Σχήμα 3.5.3.)

Παράδειγμα 2 Κοντά σε ποια σημεία μπορεί να αναπαρασταθεί η επιφάνεια

$$x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 1$$

ως γράφημα μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $z = k(x, y)$;

Λύση Παίρνουμε $F(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y - 1$ και προσπαθούμε να λύσουμε την $F(x, y, z) = 0$ ως προς z συναρτήσει των (x, y). Σύμφωνα με το Θεώρημα 11, αυτό μπορεί να γίνει κοντά σε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) αν $(\partial F/\partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, δηλαδή αν

$$z_0(16x_0 - 9z_0y_0) \neq 0,$$

το οποίο, με τη σειρά του, σημαίνει ότι ▲

$$z_0 \neq 0 \qquad \text{και} \qquad 16x_0 \neq 9z_0y_0.$$

Γενικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε, χωρίς απόδειξη, το *γενικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων.*[14] Αντί να προσπαθήσουμε να λύσουμε μια εξίσωση ως προς μία μεταβλητή, προσπαθούμε να λύσουμε m εξισώσεις ως προς m μεταβλητές $z_1, \ldots, z_m$:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Στο Θεώρημα 11 είχαμε τη συνθήκη $\partial F/\partial z \neq 0$. Η κατάλληλη συνθήκη για το γενικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων είναι $\Delta \neq 0$,[15] όπου Δ είναι η ορίζουσα του πίνακα $m \times m$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{bmatrix}$$

υπολογισμένη στο σημείο $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$. Στη γειτονιά ενός τέτοιου σημείου, μπορούμε να λύσουμε μονοσήμαντα ως προς $\mathbf{z}$ συναρτήσει του $\mathbf{x}$.

Θεώρημα 12 Γενικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων Αν $\Delta \neq 0$, τότε κοντά στο σημείο $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$ η εξίσωση (3) ορίζει μονοσήμαντα (ομαλές) συναρτήσεις

$$z_i = k_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Οι παράγωγοί τους υπολογίζονται με πεπλεγμένη παραγώγιση.

Παράδειγμα 3 Δείξτε ότι κοντά στο σημείο $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ μπορούμε να λύσουμε τις

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

με τα u και v μονοσήμαντα ορισμένα συναρτήσει των x και y. Υπολογίστε την $\partial u/\partial x$ στο σημείο $(1, 1)$.

---

[14] Για τρεις διαφορετικές αποδείξεις της γενικής περίπτωσης, μπορείτε να συμβουλευτείτε τα εξής:
(α) E. Goursat, *A Course in Mathematical Analysis*, I, Dover, New York, 1959, σελ. 45. (Σε αυτή την απόδειξη το γενικό θεώρημα προκύπτει με διαδοχική εφαρμογή του Θεωρήματος 11.)
(β) T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2d ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
(γ) J. E. Marsden και M. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, 2d ed., Freeman, New York, 1993.
Από αυτές τις πηγές, οι δύο τελευταίες χρησιμοποιούν πιο σύνθετες έννοιες, οι οποίες συνήθως καλύπτονται μόνο σε πιο προχωρημένα μαθήματα ανάλυσης. Η πρώτη όμως απόδειξη μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητή αν ο αναγνώστης έχει γνώσεις γραμμικής άλγεβρας.

[15] Για τους φοιτητές που έχουν παρακολουθήσει κάποιο μάθημα γραμμικής άλγεβρας: Η συνθήκη $\Delta \neq 0$ έχει μια απλή ερμηνεία στην περίπτωση όπου η F *είναι γραμμική*. Συγκεκριμένα, η συνθήκη $\Delta \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την απαίτηση η τάξη της F να ισούται με m, η οποία με τη σειρά της είναι ισοδύναμη με την απαίτηση ο χώρος λύσεων της $F = 0$ να είναι m-διάστατος.

Λύση Για να ελέγξουμε την επιλυσιμότητα, σχηματίζουμε τις εξισώσεις

$$F_1(x, y, u, v) = xu + yvu^2 - 2$$
$$F_2(x, y, u, v) = xu^3 + y^2v^4 - 2$$

και την ορίζουσα

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \text{στο} \qquad (1, 1, 1, 1)$$

$$= \begin{vmatrix} x + 2yuv & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{vmatrix} \qquad \text{στο} \qquad (1, 1, 1, 1)$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9.$$

Επειδή $\Delta \neq 0$, η επιλυσιμότητα διασφαλίζεται από το γενικό θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων. Για να βρούμε την $\partial u/\partial x$, παραγωγίζουμε πεπλεγμένα τις δεδομένες εξισώσεις ως προς x χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + u + y\frac{\partial v}{\partial x}u^2 + 2yvu\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$3xu^2\frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Θέτοντας $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$, παίρνουμε

$$3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$
$$3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} = -1.$$

Για να λύσουμε ως προς $\partial u/\partial x$ πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με 4 και αφαιρούμε τις δύο εξισώσεις. Τελικά, $\partial u/\partial x = -\frac{1}{3}$. ▲

Θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης

Μια ειδική περίπτωση του γενικού θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων είναι το *θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης*. Σε αυτή την περίπτωση προσπαθούμε να λύσουμε τις n εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1 \\ \cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = y_n \end{array}\right\} \tag{4}$$

ως προς $x_1, \ldots, x_n$ συναρτήσει των $y_1, \ldots, y_n$, δηλαδή προσπαθούμε να αντιστρέψουμε τις εξισώσεις του συστήματος (4). Το πρόβλημα αυτό είναι ανάλογο με το πρόβλημα της εύρεσης των αντιστρόφων συναρτήσεων όπως των $\sin x = y$ και $e^x = y$, τις οποίες θα πρέπει να γνωρίζετε από τον στοιχειώδη απειροστικό λογισμό. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, όμως, έχουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Το ερώτημα της επιλυσιμότητας απαντάται με εφαρμογή του γενικού θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων στις συναρτήσεις $y_i - f_i(x_1, \ldots, x_n)$ με αγνώστους τα $x_1, \ldots, x_n$ (τα οποία προηγουμένως ονομάζαμε

$z_1, \dots, z_n$). Η συνθήκη επιλυσιμότητας στη γειτονιά ενός σημείου $\mathbf{x}_0$ είναι $\Delta \neq 0$, όπου Δ είναι η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, και $f = (f_1, \dots, f_n)$. Η ποσότητα Δ συμβολίζεται με $\partial(f_1, \dots, f_n)/\partial(x_1, \dots, x_n)$ ή $\partial(y_1, \dots, y_n)/\partial(x_1, \dots, x_n)$ ή $J(f)(\mathbf{x}_0)$ και ονομάζεται ***ιακωβιανή ορίζουσα*** της f. Αναλυτικά,

$$\left.\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = J(f)(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Σημειωτέον ότι στην περίπτωση όπου η f είναι γραμμική —π.χ. αν $f(x) = Ax$, όπου A είναι ένας πίνακας $n \times n$— η συνθήκη $\Delta \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την $\det A \neq 0$, όπου $\det A$ είναι η ορίζουσα του A· από την Ενότητα 1.5 γνωρίζουμε ότι ο A, και συνεπώς η f, έχει αντίστροφο.

Η ιακωβιανή ορίζουσα θα παίξει σημαντικό ρόλο στη μελέτη της ολοκλήρωσης (βλ. Κεφάλαιο 5). Τα παραπάνω συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 13 Θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και έστω ότι οι $f_1 \colon U \to \mathbb{R}, \dots, f_n \colon U \to \mathbb{R}$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους. Θεωρούμε τις εξισώσεις (4) κοντά σε μια δεδομένη λύση $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$. Αν η $J(f)(\mathbf{x}_0)$ [που ορίζεται από την εξίσωση (5)] είναι μη μηδενική, τότε η εξίσωση (4) μπορεί να λυθεί μονοσήμαντα ως $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$ για $\mathbf{x}$ κοντά στο $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{y}$ κοντά στο $\mathbf{y}_0$. Επιπλέον, η συνάρτηση g έχει συνεχείς μερικές παραγώγους.

Παράδειγμα 4 Δίνονται οι εξισώσεις

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u, \qquad \sin x + \cos y = v.$$

Κοντά σε ποια σημεία (x, y), μπορούμε να λύσουμε ως προς x, y συναρτήσει των u, v;

Λύση Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι συναρτήσεις είναι οι $u = f_1(x, y) = (x^4 + y^4)/x$ και $v = f_2(x, y) = \sin x + \cos y$. Θέλουμε να βρούμε τα σημεία κοντά στα οποία μπορούμε να λύσουμε ως προς x, y συναρτήσει των u και v. Σύμφωνα με το θεώρημα αντίστροφης συνάρτησης, πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την ιακωβιανή ορίζουσα $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y)$. Παίρνουμε ως πεδίο ορισμού της $f = (f_1, f_2)$ το $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$. Έχουμε

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{3x^4 - y^4}{x^2} & \dfrac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin y \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sin y}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x}\cos x.$$

Συνεπώς, στα σημεία όπου αυτή η ποσότητα δεν μηδενίζεται μπορούμε να λύσουμε ως προς x, y συναρτήσει των u και v. Με άλλα λόγια, μπορούμε να λύσουμε ως προς x, y κοντά στα x, y για τα οποία $x \neq 0$ και $(\sin y)(y^4 - 3x^4) \neq 4xy^3 \cos x$. Γενικά, τέτοιου είδους συνθήκες δεν μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά. Για παράδειγμα, αν $x_0 = \pi/2$, $y_0 = \pi/2$, μπορούμε να λύσουμε ως προς x, y κοντά στο (x_0, y_0), διότι εκεί $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y) \neq 0$. ▲